

## Uitwerkingen hoofdstuk 5

### 5.3

1. a.  $2x + 1 = -x + 7$   $\{-x \text{ naar links, } 1 \text{ naar rechts}\}$   
 $\Leftrightarrow 3x = 6$   $\{\text{deel door } 3\}$   
 $\Leftrightarrow x = 2$
- b.  $\frac{1}{2}y + 2 = \frac{y-1}{4}$   $\{\text{maal } 4\}$   
 $\Leftrightarrow 2y + 8 = y - 1$   $\{y \text{ naar links, } 8 \text{ naar rechts}\}$   
 $\Leftrightarrow y = -9$
- c.  $4t - 3 = 3t - 4$   $\{3t \text{ naar links, } -3 \text{ naar rechts}\}$   
 $\Leftrightarrow t = -1$
- d.  $2(p-1) = p+1$   $\{\text{haakjes uitwerken}\}$   
 $\Leftrightarrow 2p - 2 = p + 1$   $\{p \text{ naar links, } -2 \text{ naar rechts}\}$   
 $\Leftrightarrow p = 3$
- e.  $(x-1)(x-2) = (x+1)(x+2)$   $\{\text{haakjes uitwerken}\}$   
 $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 + 3x + 2$   $\{x^2 + 3x \text{ naar links, } 2 \text{ naar rechts}\}$   
 $\Leftrightarrow -6x = 0$   $\{\text{deel door } -6\}$   
 $\Leftrightarrow x = 0$
- f.  $(x+3)(2x+1) = 2x^2 + A$   $\{\text{haakjes uitwerken}\}$   
 $\Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + A$   $\{2x^2 \text{ naar links, } 3 \text{ naar rechts}\}$   
 $\Leftrightarrow 7x = A - 3$   $\{\text{deel door } 7\}$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{A-3}{7}$

2. a.  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$  {maal 6}  
 $\Leftrightarrow 3x + 2 = 2x + 3$  { $2x$  naar links, 2 naar rechts}  
 $\Leftrightarrow x = 1$
- b.  $\frac{1}{3}x - 1 = x - \frac{1}{3}$  {maal 3}  
 $\Leftrightarrow x - 3 = 3x - 1$  { $3x$  naar links,  $-3$  naar rechts}  
 $\Leftrightarrow -2x = 2$  {deel door  $-2$ }  
 $\Leftrightarrow x = -1$
- c.  $x + 2 = \frac{1}{3}(x - 2)$  {maal 3}  
 $\Leftrightarrow 3x + 6 = x - 2$  { $x$  naar links, 6 naar rechts}  
 $\Leftrightarrow 2x = -8$  {deel door 2}  
 $\Leftrightarrow x = -4$
- d.  $3(x - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}(x - 3)$  {maal 3}  
 $\Leftrightarrow 9(x - \frac{1}{3}) = x - 3$  {haakjes uitwerken}  
 $\Leftrightarrow 9x - 3 = x - 3$  { $x$  naar links,  $-3$  naar rechts}  
 $\Leftrightarrow 8x = 0$  {deel door 8}  
 $\Leftrightarrow x = 0$
- e.  $4t(t - 1) = 4t^2 - 1$  {haakjes uitwerken}  
 $\Leftrightarrow 4t^2 - 4t = 4t^2 - 1$  { $4t^2$  naar links}  
 $\Leftrightarrow -4t = -1$  {deel door  $-4$ }  
 $\Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$
- f.  $3(v - 1) + 4(2v + 5) = 6v - 1$  {haakjes uitwerken}  
 $\Leftrightarrow 3v - 3 + 8v + 20 = 6v - 1$  {termen samen nemen}  
 $\Leftrightarrow 11v + 17 = 6v - 1$  { $6v$  naar links, 17 naar rechts}  
 $\Leftrightarrow 5v = -18$  {deel door 5}  
 $\Leftrightarrow v = -\frac{18}{5} = -3\frac{3}{5}$

$$\begin{aligned}
3. \text{ a.} \quad & \frac{x}{x+4} = A && \{\text{kruislings vermenigvuldigen, } x \neq -4\} \\
& \Leftrightarrow x = Ax + 4A && \{Ax \text{ naar links}\} \\
& \Leftrightarrow x - Ax = 4A && \{x \text{ buiten haakjes halen}\} \\
& \Leftrightarrow x(1 - A) = 4A && \{\text{deel door } 1 - A\} \\
& \Leftrightarrow x = \frac{4A}{1 - A}
\end{aligned}$$

Aan de voorwaarde  $x \neq -4$  is altijd voldaan, want  $\frac{-4}{0}$  bestaat niet, dus  $\frac{-4}{0} \neq A$ .

$$\begin{aligned}
\text{b.} \quad & \frac{x+4}{4} = A && \{\text{maal } 4\} \\
& \Leftrightarrow x+4 = 4A && \{4 \text{ naar rechts}\} \\
& \Leftrightarrow x = 4A - 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c.} \quad & \frac{2x+1}{x} = \frac{x-2}{x} && \{\text{kruislings vermenigvuldigen, } x \neq 0\} \\
& \Leftrightarrow x(2x+1) = x(x-2) && \{\text{haakjes uitwerken}\} \\
& \Leftrightarrow 2x^2 + x = x^2 - 2x && \{x^2 - 2x \text{ naar links}\} \\
& \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 && \{\text{ontbind in factoren}\} \\
& \Leftrightarrow x(x+3) = 0 && \{\text{product is } 0\} \\
& \Leftrightarrow x = 0 \text{ (voldoet niet) of } x = -3 \text{ (voldoet)}
\end{aligned}$$

Oplossing:  $x = -3$

$$\begin{aligned}
\text{d.} \quad & \frac{1}{x} - 1 = 1 - \frac{1}{x} && \{-\frac{1}{x} \text{ naar links, } -1 \text{ naar rechts}\} \\
& \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 2 && \{\text{kruislings vermenigvuldigen, } x \neq 0\} \\
& \Leftrightarrow 2 = 2x && \{\text{deel door } 2\} \\
& \Leftrightarrow x = 1 \text{ (voldoet)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e.} \quad & (x+1)^2 = (x-1)^2 && \{\text{haakjes uitwerken}\} \\
& \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 && \{x^2 - 2x \text{ naar links, } 1 \text{ naar rechts}\} \\
& \Leftrightarrow 4x = 0 && \{\text{deel door } 4\} \\
& \Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f.} \quad & \frac{1}{3x+4} = \frac{1}{x} && \{\text{kruislings vermenigvuldigen, } 3x+4 \neq 0 \text{ en } x \neq 0\} \\
 \Leftrightarrow & x = 3x+4 && \{3x \text{ naar links}\} \\
 \Leftrightarrow & -2x = 4 && \{\text{deel door } -2\} \\
 \Leftrightarrow & x = -2 \text{ (voldoet)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{4. a.} \quad & (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}) = 3 && \{\text{merkwaardig product } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2\} \\
 \Leftrightarrow & 1 - (\sqrt{x})^2 = 3 && \{(\sqrt{x})^2 = x, \text{ voorwaarde } x \geq 0\} \\
 \Leftrightarrow & 1 - x = 3 && \{-x \text{ naar rechts, } 3 \text{ naar links}\} \\
 \Leftrightarrow & x = -2 \text{ (voldoet niet, } -2 < 0)
 \end{aligned}$$

De vergelijking  $(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}) = 3$  heeft geen oplossing.

$$\begin{aligned}
 \text{b.} \quad & x + \sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2 && \{\text{haakjes uitwerken}\} \\
 \Leftrightarrow & x + \sqrt{x} = 1 - 2\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 && \{(\sqrt{x})^2 = x, \text{ voorwaarde } x \geq 0\} \\
 \Leftrightarrow & x + \sqrt{x} = 1 - 2\sqrt{x} + x && \{-2\sqrt{x} + x \text{ naar links}\} \\
 \Leftrightarrow & 3\sqrt{x} = 1 && \{\text{deel door } 3\} \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{x} = \frac{1}{3} && \{\text{kwadrateer, } \frac{1}{3} \geq 0\} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{1}{9} \text{ (voldoet)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Controle: } \frac{1}{9} + \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \text{ en } \left(1 - \sqrt{\frac{1}{9}}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c.} \quad & \frac{4}{1 + \sqrt{x}} = 1 && \{\text{kruislings vermenigvuldigen mag, want } 1 + \sqrt{x} \geq 1\} \\
 \Leftrightarrow & 4 = 1 + \sqrt{x} && \{1 \text{ naar links}\} \\
 \Leftrightarrow & 3 = \sqrt{x} && \{\text{kwadrateer}\} \\
 \Leftrightarrow & x = 9
 \end{aligned}$$

$$\text{Controle: } \frac{4}{1 + \sqrt{9}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{d.} \quad & 5(1 + \sqrt{x}) + 3(2 - \sqrt{x}) = 6\sqrt{x} && \{\text{haakjes uitwerken}\} \\
 \Leftrightarrow & 5 + 5\sqrt{x} + 6 - 3\sqrt{x} = 6\sqrt{x} && \{\text{uitwerken}\} \\
 \Leftrightarrow & 11 + 2\sqrt{x} = 6\sqrt{x} && \{2\sqrt{x} \text{ naar rechts}\} \\
 \Leftrightarrow & 11 = 4\sqrt{x} && \{\text{deel door } 4\} \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{x} = \frac{11}{4} && \{\text{kwadrateer, voorwaarde } x \geq 0\} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{121}{16} = 7\frac{9}{16} \text{ (voldoet)}
 \end{aligned}$$

- e.  $\sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  {kruislings vermenigvuldigen, voorwaarde  $x \neq -1$ }
- $\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 = 1$  {kwadrateer, voorwaarde  $x+1 \geq 0$ }
- $\Leftrightarrow x+1 = 1$  {1 naar rechts}
- $\Leftrightarrow x = 0$  (voldoet)
- 
- f.  $\sqrt{x+1} - \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$  {gelijknamig maken}
- $\Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$  {uitwerken}
- $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$  {kruislings vermenigvuldigen, voorwaarde  $x \neq -1$ }
- $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2$  {kwadrateer, voorwaarde  $x+1 \geq 0$ }
- $\Leftrightarrow x+1 = 4$  {1 naar rechts}
- $\Leftrightarrow x = 3$  (voldoet)
- 
5. a.  $2x + p = -x + 7$   $\{-x$  naar links,  $p$  naar rechts}
- $\Leftrightarrow 3x = 7 - p$  {deel door 3}
- $\Leftrightarrow x = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}p$
- 
- b.  $\frac{1}{2}x + p = \frac{x-1}{4}$  {maal 4}
- $\Leftrightarrow 2x + 4p = x - 1$   $\{x$  naar links,  $4p$  naar rechts}
- $\Leftrightarrow x = -4p - 1$
- 
- c.  $4x - a = 3x - b$  {3x naar links,  $-a$  naar rechts}
- $\Leftrightarrow x = a - b$
- 
- d.  $a(x-1) = x+1$  {haakjes uitwerken}
- $\Leftrightarrow ax - a = x+1$   $\{x$  naar links,  $-a$  naar rechts}
- $\Leftrightarrow (a-1)x = a+1$  {deel door  $a-1$ }
- $\Leftrightarrow x = \frac{a+1}{a-1}$

- e.  $(x - a)(x - b) = x(x + 1)$  {haakjes uitwerken}
- $\Leftrightarrow x^2 - (a + b)x + ab = x^2 + x$   $\{x^2 + x \text{ naar links, } ab \text{ naar rechts}\}$
- $\Leftrightarrow -(a + b + 1)x = -ab$  {deel door  $-(a + b + 1)$ }
- $\Leftrightarrow x = \frac{ab}{a + b + 1}$
- f.  $a(2x + 1) = b(2x - 1)$  {haakjes uitwerken}
- $\Leftrightarrow 2ax + a = 2bx - b$   $\{2bx \text{ naar links, } a \text{ naar rechts}\}$
- $\Leftrightarrow 2ax - 2bx = -a - b$  {haal  $x$  buiten haakjes}
- $\Leftrightarrow (2a - 2b)x = -a - b$  {deel door  $2a - 2b$ }
- $\Leftrightarrow x = \frac{-a - b}{2a - 2b} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a + b}{a - b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a + b}{b - a}$  **(het antwoord in het boek is onjuist!)**
6. a.  $2x + \sqrt{3} = -x + 7$   $\{-x \text{ naar links, } \sqrt{3} \text{ naar rechts}\}$
- $\Leftrightarrow 3x = 7 - \sqrt{3}$  {deel door 3}
- $\Leftrightarrow x = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}$
- b.  $\frac{1}{2}x + 2\sqrt{2} = \frac{x - 1}{4}$  {maal 4}
- $\Leftrightarrow 2x + 8\sqrt{2} = x - 1$   $\{x \text{ naar links, } 8\sqrt{2} \text{ naar rechts}\}$
- $\Leftrightarrow x = -1 - 8\sqrt{2}$
- c.  $4x - \sqrt{8} = 3x - \sqrt{2}$   $\{3x \text{ naar links, } -\sqrt{8} \text{ naar rechts}\}$
- $\Leftrightarrow x = \sqrt{8} - \sqrt{2}$   $\{\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}\}$
- $\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$
- d.  $3(x - 1)\sqrt{3} = 6x + 1$  {haakjes uitwerken}
- $\Leftrightarrow 3\sqrt{3}x - 3\sqrt{3} = 6x + 1$   $\{6x \text{ naar links, } -3\sqrt{3} \text{ naar rechts}\}$
- $\Leftrightarrow (3\sqrt{3} - 6)x = 3\sqrt{3} + 1$  {deel door  $3\sqrt{3} - 6 = 3(\sqrt{3} - 2)$ }
- $\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3} + 1}{3(\sqrt{3} - 2)}$  {verdrijf wortel uit de noemer}
- $\Leftrightarrow x = \frac{(3\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 2)}{3(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)}$  {werk uit}
- $\Leftrightarrow x = \frac{9 + 7\sqrt{3} + 2}{3 \cdot -1} = -\frac{11}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{3}$

- e.  $2\sqrt[4]{5} = 2x - 1$  {verwissel links en rechts}
- $\Leftrightarrow 2x - 1 = 2\sqrt[4]{5}$  {-1 naar rechts}
- $\Leftrightarrow 2x = 1 + 2\sqrt[4]{5}$  {deel door 2}
- $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \sqrt[4]{5}$
- f.  $2x\sqrt{x} = 4$  {deel door 2}
- $\Leftrightarrow x\sqrt{x} = 2$  {kwadrateer, *voorwaarde*  $x \geq 0$ }
- $\Leftrightarrow x^3 = 4$  {neem de derdemachtswortel}
- $\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$  (voldoet)
7. a.  $2(t + 3) + \sqrt{A} = -t + 6$  {haakjes uitwerken}
- $\Leftrightarrow 2t + 6 + \sqrt{A} = -t + 6$  {-t naar links,  $6 + \sqrt{A}$  naar rechts}
- $\Leftrightarrow 3t = -\sqrt{A}$  {deel door 3}
- $\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}\sqrt{A}$
- b.  $\frac{1}{2}(t + 2) = \frac{t - 1}{A}$  {maal 2A}
- $\Leftrightarrow At + 2A = 2t - 2$  {2t naar links, 2A naar rechts}
- $\Leftrightarrow -2t + At = -2 - 2A$  {-t buiten haakjes, -2 buiten haakjes}
- $\Leftrightarrow -t(2 - A) = -2(1 + A)$  {deel door  $-(2 - A)$ }
- $\Leftrightarrow t = \frac{2(1 + A)}{2 - A} = -2 \cdot \frac{A + 1}{A - 2}$
- c.  $4(t - A) = 3t + A$  {haakjes uitwerken}
- $\Leftrightarrow 4t - 4A = 3t + A$  {3t naar links, -4A naar rechts}
- $\Leftrightarrow t = 5A$
- d.  $3A(t - 1) = 6t + 1$  {haakjes uitwerken}
- $\Leftrightarrow 3At - 3A = 6t + 1$  {6t naar links, -3A naar rechts}
- $\Leftrightarrow (3A - 6)t = 3A + 1$  {deel door  $3A - 6 = 3(A - 2)$ }
- $\Leftrightarrow t = \frac{3A + 1}{3(A - 2)}$

- e.  $2At = 2(t - 3) - 1$  {haakjes uitwerken}  
 $\Leftrightarrow 2At = 2t - 7$  {2t naar links}  
 $\Leftrightarrow (2A - 2)t = -7$  {deel door  $2A - 2 = 2(A - 1)$ }  
 $\Leftrightarrow t = \frac{-7}{2(A - 1)} = \frac{7}{2(1 - A)}$
- f.  $2(t - 2A) = A$  {deel door 2}  
 $\Leftrightarrow t - 2A = \frac{1}{2}A$  { $-2A$  naar rechts}  
 $\Leftrightarrow t = 2\frac{1}{2}A$
8. a.  $2(t + 3) + \sqrt{A} = -t + 6$  {haakjes uitwerken}  
 $\Leftrightarrow 2t + 6 + \sqrt{A} = -t + 6$  {2t + 6 naar rechts}  
 $\Leftrightarrow \sqrt{A} = -3t$  {kwadrateer, voorwaarde  $-3t \geq 0$ , dus  $t \leq 0$ }  
 $\Leftrightarrow A = 9t^2$  met als voorwaarde  $t \leq 0$
- b.  $\frac{1}{2}(t + 2) = \frac{t - 1}{A}$  {maal 2A, voorwaarde  $A \neq 0$ }  
 $\Leftrightarrow A(t + 2) = 2(t - 1)$  {deel door  $t + 2$ }  
 $\Leftrightarrow A = \frac{2(t - 1)}{t + 2}$  voor  $t \neq -2$  (vanwege de voorwaarde  $A \neq 0$ )
- c.  $4(t - A) = 3t + A$  {haakjes uitwerken}  
 $\Leftrightarrow 4t - 4A = 3t + A$  {3t naar links,  $-4A$  naar rechts}  
 $\Leftrightarrow t = 5A$  {deel door 5}  
 $\Leftrightarrow A = \frac{1}{5}t$
- d.  $3A(t - 1) = 6t + 1$  {deel door  $3(t - 1)$ }  
 $\Leftrightarrow A = \frac{6t + 1}{3(t - 1)}$



$$\begin{aligned} \text{e.} \quad & 2At = 2(t-3) - 1 && \{\text{deel door } 2t\} \\ \Leftrightarrow & A = \frac{2t-7}{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f.} \quad & 2(t-2A) = A && \{\text{haakjes uitwerken}\} \\ \Leftrightarrow & 2t - 4A = A && \{-4A \text{ naar rechts}\} \\ \Leftrightarrow & 2t = 5A && \{\text{verwissel links en rechts en deel door } 5\} \\ \Leftrightarrow & A = \frac{2}{5}t \end{aligned}$$

$$9. \quad \frac{x}{x-1} = \frac{x+A}{x}$$

a. Laat zien dat elke oplossing voldoet aan  $x = \frac{A}{A-1}$ :

Als  $x$  een oplossing is dan geldt:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x-1} = \frac{x+A}{x} && \{\text{kruislings vermenigvuldigen, } x \neq 0 \text{ en } x \neq 1\} \\ \Rightarrow & x^2 = (x-1)(x+A) && \{\text{haakjes uitwerken}\} \\ \Leftrightarrow & x^2 = x^2 + Ax - x - A && \{x^2 \text{ naar rechts, } -A \text{ naar links}\} \\ \Leftrightarrow & A = x(A-1) && \{\text{deel door } A-1\} \\ \Leftrightarrow & x = \frac{A}{A-1} \end{aligned}$$

b. Wat zijn de voorwaarden voor het bestaan van een oplossing?

Bij het kruislings vermenigvuldigen zijn de voorwaarden  $x \neq 0$  en  $x \neq 1$ . Als je in de oplossing  $x = 0$  invult, dan krijg je:  $\frac{A}{A-1} = 0$ , dus  $A = 0$ . Blijkbaar is  $A = 0$  niet toegestaan.

Vul je  $x = 1$  in, dan komt er:  $\frac{A}{A-1} = 1$ , dus  $A = A - 1$  en dat heeft geen oplossing voor  $A$ .

Ten slotte mag in  $x = \frac{A}{A-1}$  de noemer  $A - 1$  niet 0 zijn, dus  $A = 1$  is ook niet toegestaan.

De voorwaarden voor het bestaan van een oplossing:  $A \neq 0$  en  $A \neq 1$

c. Wat zijn de oplossingen als  $A = 0$  en wat zijn de oplossingen als  $A = 1$ ?

$A = 0$  en  $A = 1$  zijn niet toegestaan, zie onderdeel b.

Voor  $A = 0$  en voor  $A = 1$  zijn er geen oplossingen.