Wiskunde voor bachelor en master
Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

Uitwerkingen hoofdstuk 13

13.3

1. a. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

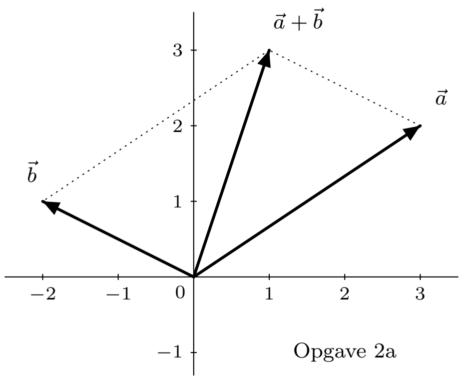
   c. $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

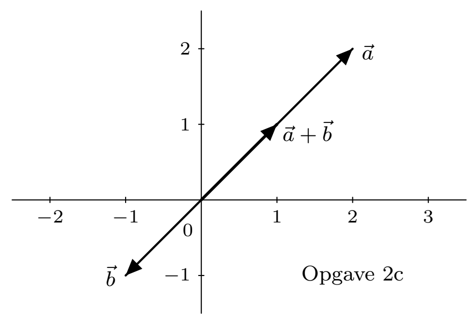
   d. $\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$

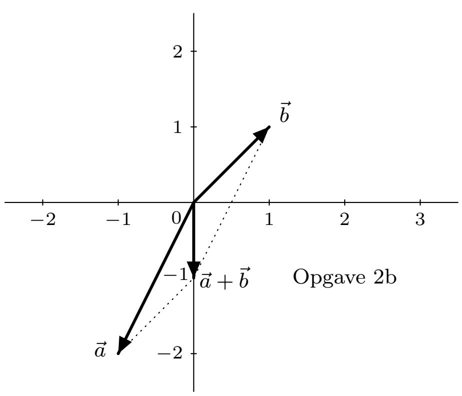
   e. $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

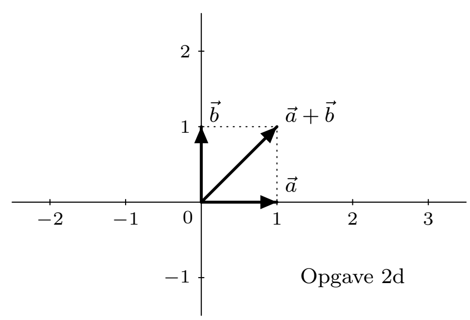
   f. $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

2. De gevraagde oplossingen staan onderstaand getekend.









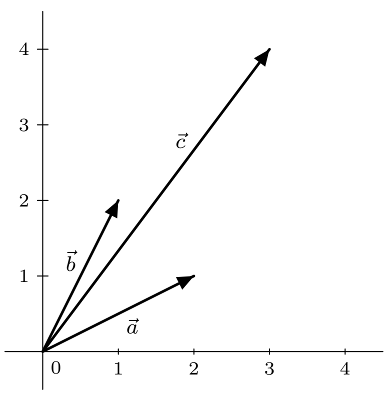
3. a. $3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$

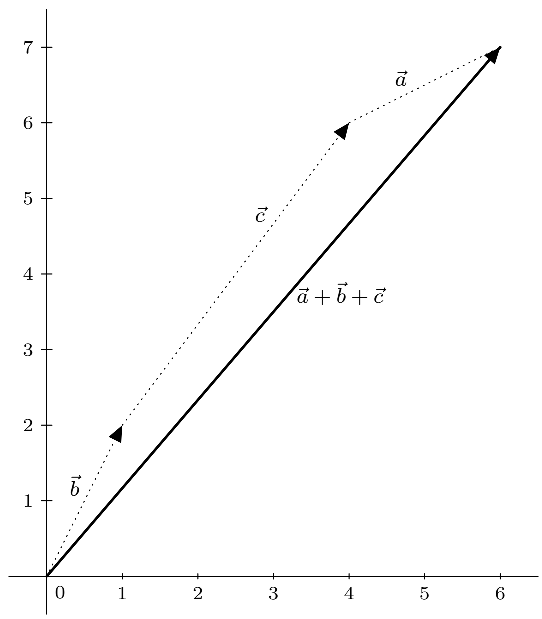
   b. $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+0-2\\2+3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

4. In de linkerafbeelding zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ getekend.

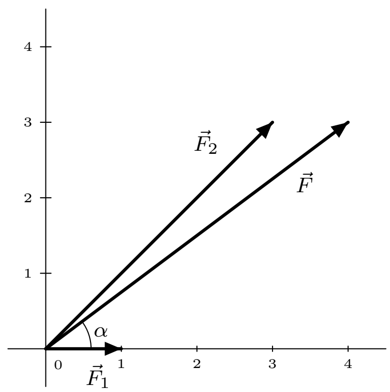
   In de rechterafbeelding zijn ze kop aan staart gelegd: eerst $\vec{b}$, dan $\vec{c}$ en dan $\vec{a}$.
   Het zo verkregen eindpunt is dan het eindpunt van de som van deze vectoren.

   Met een berekening: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$





5 a. $|\vec{F}_1| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ en $|\vec{F}_2| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$

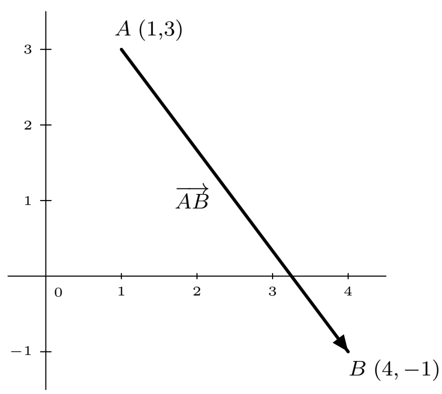


b. $\vec{F} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

c. $|\vec{F}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

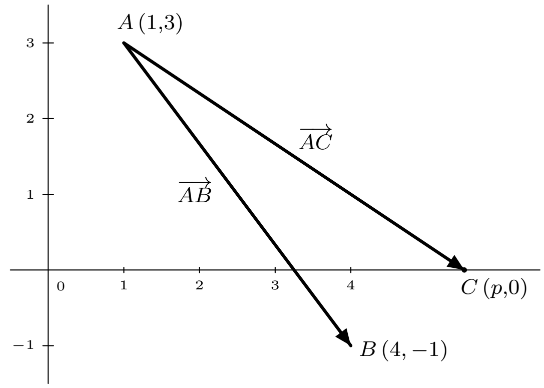
$\tan\alpha = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \alpha = \boxed{\tan^{-1}}(0{,}75) = 36{,}9°$

6 a.



$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

b. Punt C ligt op de x-as en heeft coördinaten $(p,0)$.



Voor het bepalen van $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ maken we de oorsprong beginpunt van de vectoren, dat wil zeggen: een verschuiving van A naar (0,0).

Dat betekent dat de x-coördinaten met 1 en de y-coördinaten met 3 worden verminderd.

Dan correspondeert A met (0,0), B met $(3,-4)$ en C met $(p-1,-3)$.

Hiermee is te zien: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} p-1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en dus $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} p+2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Voor de lengte van $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ krijg je $\left| \begin{pmatrix} p+2 \\ -7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(p+2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{(p+2)^2 + 49}$.

Deze lengte is $\sqrt{98}$ als $(p+2)^2 = 49$ dus $p = -2 \pm 7$. De oplossing is: $p = 5 \ \vee \ p = -9$.

c. De oplossingen zijn getekend in de onderstaande figuur, waarbij A als oorsprong is gekozen en de originele assen met een streepjeslijn zijn aangegeven.

Invullen van $p = 5$ levert $\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en invullen van $p = -9$ levert $\overrightarrow{AC_2} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De somvectoren zijn dan $\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}$, beide met lengte $\sqrt{98}$.