Wiskunde voor bachelor en master

Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

www.syntaxmedia.nl

Uitwerkingen hoofdstuk 11

11.1.1

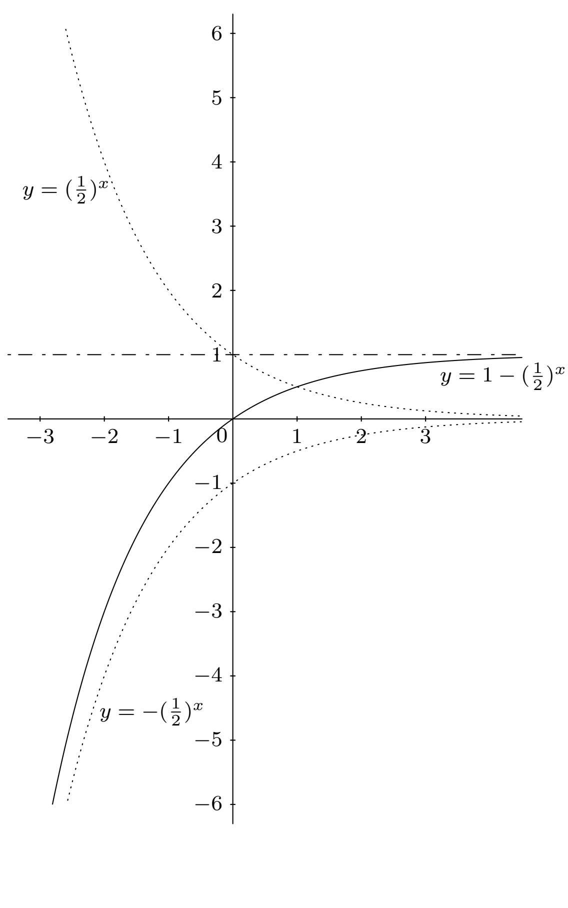
1 a. In de onderstaande figuur zijn de grafieken van $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = -(\frac{1}{2})^x$ en $y = 1 - (\frac{1}{2})^x$ getekend.

De grafiek van $y = (\frac{1}{2})^x$ staat ook in figuur 11.1b van het boek. De grafiek van $y = -(\frac{1}{2})^x$ ontstaat hieruit door spiegelen in de x-as. Deze grafieken zijn beide gestippeld getekend.
De x-as is horizontale asymptoot van deze grafieken.

De grafiek van $y = 1 - (\frac{1}{2})^x$ ontstaat uit de grafiek van $y = -(\frac{1}{2})^x$ door deze over een afstand 1 naar boven te verschuiven. Daarom is $y = 1$ een horizontale asymptoot van deze grafiek. De grafiek is stijgend en snijdt de x-as en de y-as in het punt (0,0), de oorsprong.

b. Het bereik van $f(x) = 1 - (\frac{1}{2})^x$ is $\langle -\infty, 1 \rangle$.

Dit volgt uit de grafiek.



2. Het verband tussen I en t wordt gegeven door $I = A \cdot b^t$. Bepaal A en b als verder is gegeven dat $I(0) = 5$ en een toename van t met 1 maakt I drie keer zo klein.

   Uit $I(0) = A \cdot b^0 = A \cdot 1 = A$ en het gegeven $I(0) = 5$ volgt $A = 5$. Dus $I = 5 \cdot b^t$.

   Een toename van t met 1 maakt I drie keer zo klein betekent in formulevorm:

   $$I(t+1) = \tfrac{1}{3} I(t)$$

   Invullen van I geeft:

   $$5 \cdot b^{t+1} = \tfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot b^t$$

   Dus:

   $$b \cdot 5 \cdot b^t = \tfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot b^t$$

   De conclusie is dat $b = \frac{1}{3}$ en de formule voor I is $I = 5 \cdot (\frac{1}{3})^t$.

3 a. Uit het gegeven $P(0) = 3000$ en een groeifactor van 1,02 volgt $P(t) = 3000 \cdot 1{,}02^t$ (t in seconden).

b. De groeifactor per minuut (dus per 60 seconden) vind je uit:

$$\frac{P(t+60)}{P(t)} = \frac{3000(1{,}02)^{t+60}}{3000(1{,}02)^t} = (1{,}02)^{60} \approx 3{,}2810$$

Dus met t in minuten wordt de populatiegrootte gegeven door $P(t) = 3000 \cdot 3{,}281^t$.
De groeifactor per minuut is dus 3,281.
Het groeipercentage (= (groeifactor − 1)·100%) is 228,1% per minuut.

c. Na 120 seconden is de populatiegrootte $3000 \cdot 1{,}02^{120} = 32295$.

d. Na 2 minuten is de populatiegrootte $3000 \cdot 3{,}281^2 = 32295$.

11.2.1

1. a. ${}^{3}\log\frac{1}{3} = {}^{3}\log 3^{-1} = -1$

   b. ${}^{3}\log 81 = {}^{3}\log 3^{4} = 4$

   c. ${}^{5}\log\frac{1}{25} = {}^{5}\log 5^{-2} = -2$

   d. ${}^{0,1}\log 100 = {}^{0,1}\log 10^{2} = {}^{0,1}\log(0{,}1)^{-2} = -2$

   e. ${}^{6}\log 36 = {}^{6}\log 6^{2} = 2$

   f. ${}^{2}\log 1024 = {}^{2}\log 2^{10} = 10$

2. a. ${}^{9}\log 3 = {}^{9}\log\sqrt{9} = {}^{9}\log 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

   b. ${}^{9}\log 27 = {}^{9}\log 9\sqrt{9} = {}^{9}\log 9^{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}$

   c. ${}^{5}\log 25\sqrt{5} = {}^{5}\log 5^{2\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}$

   d. ${}^{10}\log 0{,}01 = {}^{10}\log 10^{-2} = -2$

   e. ${}^{4}\log 8 = {}^{4}\log 4\sqrt{4} = {}^{4}\log 4^{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}$

   f. ${}^{2}\log\frac{1}{2}\sqrt{2} = {}^{2}\log 2^{-1}\cdot 2^{\frac{1}{2}} = {}^{2}\log 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

3. a. $2^{x} = 5 \;\Leftrightarrow\; x = {}^{2}\log 5$

   b. $1{,}2^{x} = 4 \;\Leftrightarrow\; x = {}^{1,2}\log 4$

   c. $10^{x} = 200 \;\Leftrightarrow\; x = {}^{10}\log 200$

   d. $3^{x} = 10 \;\Leftrightarrow\; x = {}^{3}\log 10$

   e. $2^{-x} = 10 \;\Leftrightarrow\; -x = {}^{2}\log 10 \quad (\Leftrightarrow x = -\,{}^{2}\log 10)$

   f. $800^{x} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = {}^{800}\log 1 = 0$

4. a. De macht waartoe je g moet verheffen om g^{a} te krijgen is a, dus ${}^{g}\log g^{a} = a$.

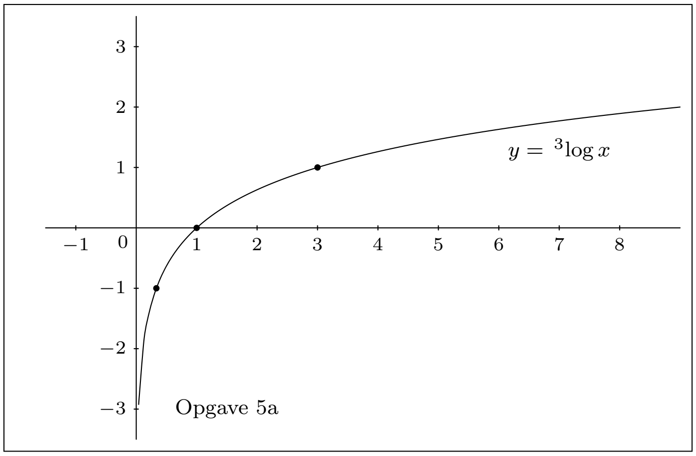
   b. ${}^{\frac{1}{p}}\log a = x$ betekent $\left(\dfrac{1}{p}\right)^{x} = a$, dus $p^{-x} = a$ en dat betekent $-x = {}^{p}\log a$, dus $x = -\,{}^{p}\log a$.

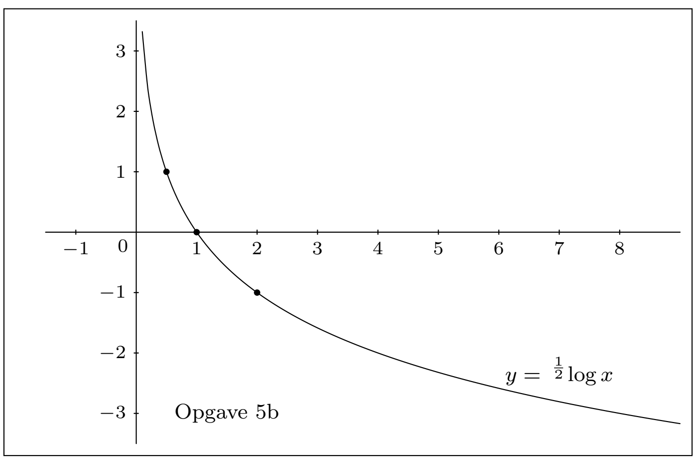
      De conclusie is ${}^{\frac{1}{p}}\log a = -\,{}^{p}\log a$

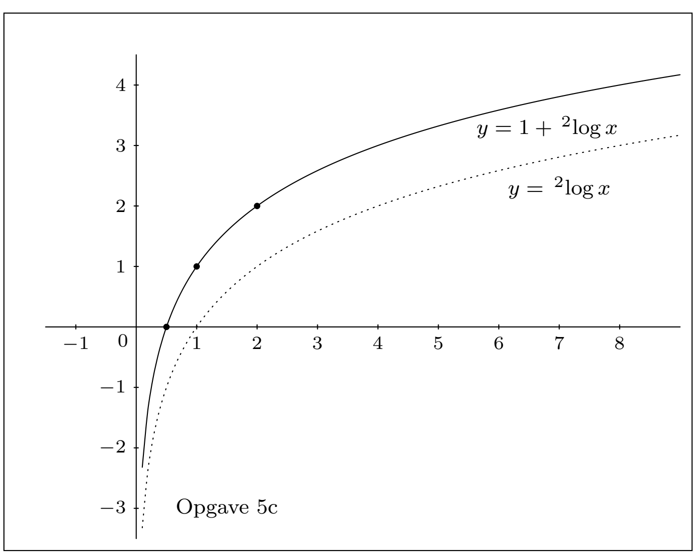
   c. ${}^{g}\log a = x$ betekent $g^{x} = a$, dus $g^{-x} = \dfrac{1}{a}$ en dat betekent $-x = {}^{g}\log\frac{1}{a}$, dus $x = -\,{}^{g}\log\frac{1}{a}$.

      De conclusie is ${}^{g}\log a = -\,{}^{g}\log\frac{1}{a}$, dus ${}^{g}\log\frac{1}{a} = -\,{}^{g}\log a$

5. De grafieken staan onderstaand getekend, met daarin een paar karakteristieke punten. De grafiek van $y = 1 + {}^2\log x$ ontstaat uit de grafiek van $y = {}^2\log x$ door deze 1 naar boven te verschuiven. De y-as is steeds verticale asymptoot.







6. a.

$$\begin{aligned} & {}^{2}\log(3x+1)=4 && \{\text{definitie van logaritme}\}\\ \Leftrightarrow\quad & 3x+1=2^4 && \{\text{1 naar rechts}\}\\ \Leftrightarrow\quad & 3x=15 && \{\text{deel door 3}\}\\ \Leftrightarrow\quad & x=5 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} & {}^{10}\log 4x^2=2 && \{\text{definitie van logaritme}\}\\ \Leftrightarrow\quad & 4x^2=10^2 && \{\text{deel door 4}\}\\ \Leftrightarrow\quad & x^2=25\\ \Leftrightarrow\quad & x=5 \ \vee\ x=-5 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} & {}^{3}\log(2x-1)=2 && \{\text{definitie van logaritme}\}\\ \Leftrightarrow\quad & 2x-1=3^2\\ \Leftrightarrow\quad & 2x=10\\ \Leftrightarrow\quad & x=5 \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} & {}^{5}\log x=\tfrac{1}{2} && \{\text{definitie van logaritme}\}\\ \Leftrightarrow\quad & x=5^{\frac{1}{2}}\\ \Leftrightarrow\quad & x=\sqrt{5} \end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned} & {}^{2}\log({}^{2}\log x)=3 && \{\text{definitie van logaritme}\}\\ \Leftrightarrow\quad & {}^{2}\log x=2^3=8 && \{\text{definitie van logaritme}\}\\ \Leftrightarrow\quad & x=2^8\\ \Leftrightarrow\quad & x=256 \end{aligned}$$

f.

$$\begin{aligned} & {}^{2}\log\frac{1}{x}=1 && \{\text{definitie van logaritme}\}\\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{x}=2^1\\ \Leftrightarrow\quad & x=\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

7. $H(t) = 80 \cdot 10^t$ (t in minuten). De verdubbeltijd geven we aan met τ.

a.

$$\begin{array}{lll} & H(\tau) = 160 & \{\text{definitie van } H\} \\ \Leftrightarrow & 80 \cdot 10^{\tau} = 160 & \{\text{deel door } 80\} \\ \Leftrightarrow & 10^{\tau} = 2 & \{\text{definitie van logaritme}\} \\ \Leftrightarrow & \tau = {}^{10}\log 2 \text{ minuten} & \end{array}$$

b. $\tau = {}^{10}\log 2 \approx 0{,}3010$ minuten (ongeveer 18 seconden).

Elke 18 seconden verdubbelt de hoeveelheid zich.

c. Op tijdstip $-\tau$ gold: $H(-\tau) = H(-0{,}3010) = 80 \cdot 10^{-0{,}3010} \approx 40{,}0$.

Of exact berekend:

$$H(-\tau) = H(-\,{}^{10}\log 2) = 80 \cdot 10^{-\,{}^{10}\log 2} = 80 \cdot \left(10^{\,{}^{10}\log 2}\right)^{-1} = 80 \cdot 2^{-1} = 80 \cdot \tfrac{1}{2} = 40$$

11.3.1

Gebruik van de rekenmachine

Voor het bepalen van ${}^{p}\log a$ met een grafische rekenmachine kunnen meestal p en a worden ingevoerd. Zo levert een TI grafische rekenmachine voor ${}^{1,5}\log 3$, waarbij de waarden 1,5 en 3 beide worden ingevoerd:

$$\boxed{\text{log}}_{\,1,5}\, 3 \approx 2{,}7095111$$

Het kan ook met de overgang naar grondtal 10 (grondtal 10 wordt in ${}^{10}\log$ meestal weggelaten):

$${}^{1,5}\log 3 = \frac{\boxed{\text{log}}\,3}{\boxed{\text{log}}\,1{,}5} \approx \frac{0{,}477121255}{0{,}176091259} = 2{,}70951$$

Ten slotte kan het met de overgang naar de 'natuurlijke logaritme' die in deel 2 aan de orde komt en wordt genoteerd als $\ln x$. Dan wordt het resultaat:

$${}^{1,5}\log 3 = \frac{\boxed{\text{ln}}\,3}{\boxed{\text{ln}}\,1{,}5} \approx \frac{1{,}098612289}{0{,}405465108} = 2{,}70951$$

Uiteraard hoeven de tussenresultaten niet te worden berekend en kun je de deling direct invoeren.

Bij de uitwerkingen volstaan we met het geven van het eindresultaat.

1. a. $3^x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = {}^{3}\log 7 \approx 1{,}77$

   b. $3^{-x} = \frac{1}{30} \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 30 \quad \Leftrightarrow \quad x = {}^{3}\log 30 \approx 3{,}096$

   c. $1{,}5^x = 3{,}375 \quad \Leftrightarrow \quad x = {}^{1,5}\log 3{,}375 = 3$ (exacte waarde, want $1{,}5^3 = 3{,}375$)

   d. $x^3 = 20 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{20} \approx 2{,}714$

   e. $(\frac{1}{3})^x = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad x = {}^{3}\log 0{,}1 = -\,{}^{3}\log 10 \approx -2{,}096$

   f. $100^x = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad x = {}^{100}\log 1000 = 1\frac{1}{2}$, want $100^{1\frac{1}{2}} = 100\sqrt{100} = 100 \cdot 10 = 1000$

2. a. $^9\log x - {}^9\log y + {}^9\log z = {}^9\log \dfrac{xz}{y}$

   b. $2\,{}^3\log x - {}^3\log\sqrt{x} = 2\,{}^3\log x - {}^3\log x^{\frac{1}{2}} = 2\,{}^3\log x - \frac{1}{2}{}^3\log x = 1\frac{1}{2}\cdot{}^3\log x$

   c. $\log x + \log\dfrac{y}{x} = \log x\cdot\dfrac{y}{x} = \log y,$ *mits* $x > 0$ (anders bestaat $\log x + \log\dfrac{y}{x}$ niet)

   d. $^4\log x + {}^2\log x = \dfrac{^2\log x}{^2\log 4} + {}^2\log x = \dfrac{^2\log x}{2} + {}^2\log x = 1\frac{1}{2}\cdot{}^2\log x$

   e. $^2\log 8a - {}^2\log 4a^2 + 1 = {}^2\log 8a - {}^2\log 4a^2 + {}^2\log 2 = {}^2\log\dfrac{8a\cdot 2}{4a^2} = {}^2\log\dfrac{4}{a}$

   f. $^2\log 34 - {}^2\log 17 = {}^2\log\dfrac{34}{17} = {}^2\log 2 \quad (= 1)$

3. a. $^p\log q = \dfrac{^q\log q}{^q\log p} = \dfrac{1}{^q\log p}$

   b. $^g\log a = \dfrac{^{\frac{1}{g}}\log a}{^{\frac{1}{g}}\log g} = \dfrac{^{\frac{1}{g}}\log a}{-1} = -\,{}^{\frac{1}{g}}\log a \qquad \left[\,{}^{\frac{1}{g}}\log g = -1 \text{ omdat } \left(\frac{1}{g}\right)^{-1} = g\right]$

4. a. $^3\log 100 \approx 4{,}192$

   b. $^{\frac{1}{3}}\log 10 \approx -2{,}096$

   c. $^{10}\log\frac{1}{20} \approx -1{,}301$

5. a.

$$\begin{array}{lll} & V(t) = 30 & \{\text{definitie } V\} \\ \Leftrightarrow & 20 \cdot 1{,}04^t = 30 & \{\text{deel door } 20\} \\ \Leftrightarrow & 1{,}04^t = 1\tfrac{1}{2} & \{\text{definitie logaritme}\} \\ \Leftrightarrow & t = {}^{1{,}04}\log 1{,}5 \approx 10{,}34 \text{ seconden} & \end{array}$$

Het kan ook zo:

$$\begin{array}{lll} & V(t) = 30 & \{\text{definitie } V\} \\ \Leftrightarrow & 20 \cdot 1{,}04^t = 30 & \{\text{deel door } 20\} \\ \Leftrightarrow & 1{,}04^t = 1\tfrac{1}{2} & \{\text{neem van beide kanten de logaritme}\} \\ \Leftrightarrow & \log 1{,}04^t = \log 1{,}5 & \{\text{eigenschap van de logaritme}\} \\ \Leftrightarrow & t = \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}04} \approx 10{,}34 \text{ seconden} & \end{array}$$

b. Voor de verdubbeltijd τ geldt $V(\tau) = 40$, want $V(0) = 20$:

$$\begin{array}{lll} & V(\tau) = 40 & \{\text{definitie } V\} \\ \Leftrightarrow & 20 \cdot 1{,}04^\tau = 40 & \{\text{deel door } 20\} \\ \Leftrightarrow & 1{,}04^\tau = 2 & \{\text{definitie logaritme}\} \\ \Leftrightarrow & \tau = {}^{1{,}04}\log 2 \approx 17{,}67 \text{ seconden} & \end{array}$$

c. Voor t in minuten geldt als formule $V(t) = 20 \cdot 1{,}04^{60t}$, want 1 minuut is 60 seconden.

Uit $20 \cdot 1{,}04^{60t} = 20 \cdot \left(1{,}04^{60}\right)^t = 20 \cdot (10{,}52)^t$ volgt:

$$V = 20 \cdot 10{,}52^t \ (t \text{ in minuten})$$

d. De verdubbeltijd τ in minuten volgt uit $10{,}52^\tau = 2$

Dan is $\tau = {}^{10{,}52}\log 2 \approx 0{,}295$ minuten.

(dit klopt met onderdeel b: $0{,}295 \cdot 60 = 17{,}7$ seconden)