Wiskunde voor bachelor en master
Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

Uitwerkingen diagnostische toets hoofdstuk 6

1. a.

$$\begin{aligned} & a^2 + a - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a+4)(a-3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a = -4 \ \vee\ a = 3 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} & t^2 - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & t^2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & t = 3 \ \vee\ t = -3 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} & r^4 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & r^4 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & r = 1 \ \vee\ r = -1 \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 12x - 63 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 4x - 21 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-7)(x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 7 \ \vee\ x = -3 \end{aligned}$$

2. a.

$$
\begin{array}{lll}
 & y^2+12y+11=0 & \{\text{ontbind in factoren}\} \\
\Leftrightarrow & (y+1)(y+11)=0 & \\
\Leftrightarrow & y=-1 \ \vee \ y=-11 &
\end{array}
$$

b.

$$
\begin{array}{lll}
 & 2x-\sqrt{2x+10}=2 & \{2 \text{ naar links, } \sqrt{2x+10} \text{ naar rechts}\} \\
\Leftrightarrow & 2x-2=\sqrt{2x+10} & \{\text{kwadrateer, geen equivalentie!}\} \\
\Rightarrow & 4x^2-8x+4=2x+10 & \{\text{herleid tot 0 en deel door 2}\} \\
\Leftrightarrow & 2x^2-5x-3=0 & \{\text{discriminant is } 25-4\cdot 2\cdot -3=49\} \\
\Leftrightarrow & x_{1,2}=\dfrac{5\pm 7}{4} & \\
\Leftrightarrow & x=3 \ \vee \ x=-\tfrac{1}{2} &
\end{array}
$$

Controle:
$x=3: \ 2\cdot 3-\sqrt{2\cdot 3+10}=2$ levert: $6-4=2$ en dat is juist.
$x=-\frac{1}{2}: \ 2\cdot -\frac{1}{2}-\sqrt{2\cdot -\frac{1}{2}+10}=2$ levert: $-1-3=2$ en dat is onjuist.

Conclusie: $x=3$ is de enige oplossing van deze vergelijking.

c.

$$
\begin{array}{lll}
 & t^4+9=10t^2 & \{\text{substitutie } t^2=x\} \\
\Leftrightarrow & x^2+9=10x & \{\text{herleid op 0}\} \\
\Leftrightarrow & x^2-10x+9=0 & \{\text{ontbind in factoren}\} \\
\Leftrightarrow & (x-1)(x-9)=0 & \\
\Leftrightarrow & x=1 \ \vee \ x=9 & \{x=t^2\} \\
\Leftrightarrow & t^2=1 \ \vee \ t^2=9 & \{\text{standaardvergelijkingen}\} \\
\Leftrightarrow & t=1 \ \vee \ t=-1 \ \vee \ t=3 \ \vee \ t=-3 &
\end{array}
$$

d.

$$
\begin{array}{lll}
 & \dfrac{9}{x-2}=2x-7 & \{\text{maal } x-2, \text{ voorwaarde } x\neq 2\} \\
\Leftrightarrow & 9=(2x-7)(x-2) & \{\text{haakjes uitwerken, verwissel links en rechts}\} \\
\Leftrightarrow & 2x^2-7x-4x+14=9 & \\
\Leftrightarrow & 2x^2-11x+5=0 & \{\text{abc-formule}\} \\
\Leftrightarrow & x=\dfrac{11\pm\sqrt{121-4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2}=\dfrac{11\pm\sqrt{81}}{4}=\dfrac{11\pm 9}{4} & \\
\Leftrightarrow & x=5 \ \vee \ x=\tfrac{1}{2} &
\end{array}
$$

3. a.

$$3t^2 - 3t + 1 = 0 \qquad \{\text{discriminant: } (-3)^2 - 4{\cdot}3{\cdot}1 = 9 - 12 = -3\}$$

De discriminant is negatief: de vergelijking heeft geen oplossingen.

b.

$$\begin{aligned} & 4x^2 + 4x - 8 = 0 && \{\text{deel door } 4\} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + x - 2 = 0 && \{\text{discriminant: } 1^2 - 4{\cdot}1{\cdot}{-2} = 1 + 8 = 9\} \\ \Leftrightarrow\ & x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \ \vee\ x = -2 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} & a^2 + 2a - 12 = 0 && \{\text{discriminant: } 2^2 - 4{\cdot}1{\cdot}{-12} = 4 + 48 = 52\} \\ \Leftrightarrow\ & a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13} \\ \Leftrightarrow\ & a = -1 + \sqrt{13} \ \vee\ a = -1 - \sqrt{13} \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} & x^2 + 5x - 4 = 0 && \{\text{discriminant: } 5^2 - 4{\cdot}1{\cdot}{-4} = 25 + 16 = 41\} \\ \Leftrightarrow\ & x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2} = -2\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{41} \\ \Leftrightarrow\ & x = -2\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{41} \ \vee\ x = -2\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{41} \end{aligned}$$

4. Een tweedegraadsvergelijking heeft precies één oplossing als de discriminant 0 is.
De discriminant van de vergelijking $px^2 - px + 2 = 0$ is $(-p)^2 - 4{\cdot}p{\cdot}2 = p^2 - 8p$.

$$\begin{aligned} & p^2 - 8p = 0 \\ \Leftrightarrow\ & p(p - 8) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & p = 0 \ \vee\ p = 8 \end{aligned}$$

De oplossing $p = 0$ voldoet echter niet, want voor een tweedegraadsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is afgesproken $a \neq 0$. Vul je $p = 0$ in dan ontstaat de vergelijking $2 = 0$ en dat geldt voor geen enkele x.

De oplossing is dus $p = 8$ en daarbij hoort de vergelijking $8x^2 - 8x + 2 = 0$, met als enige oplossing $x = \frac{1}{2}$ (de abc-formule geeft $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{0}}{16} = \frac{1}{2}$).