Wiskunde voor bachelor en master
Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

Uitwerkingen diagnostische toets hoofdstuk 10

1. De som van de hoeken is 180°, dus $\gamma = 180° - 40° - 55° = 85°$.

   Met de sinusregel volgt:

   $$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{10\sin 40°}{\sin 85°} \approx 6{,}45$$

   en

   $$b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{10\sin 55°}{\sin 85°} \approx 8{,}22$$

   Het resultaat is $\gamma = 85°$, $a \approx 6{,}45$ en $b \approx 8{,}22$.

2. $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 45° - 60° = 75°$
   Zijde a berekenen we met de sinusregel:

   $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{\sin 45°} = \frac{10}{\sin 75°} \quad \text{dus} \quad a = \frac{10\sin 45°}{\sin 75°}$$

   Nu is $\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\sin 75°$ berekenen we met de somregel:

   $$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \sin 45° \cos 30° = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$$

   Dat levert voor a:

   $$a = \frac{10\sin 45°}{\sin 75°} = \frac{10\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{4}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{20}{1+\sqrt{3}} = \frac{20(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 10(\sqrt{3}-1)$$

   De exacte waarde van zijde a is dus $10(\sqrt{3}-1)$.

   Opmerking:
   Met de grafische rekenmachine krijg je $a = \dfrac{10\sin 45°}{\sin 75°} \approx 7{,}32051$ en ook $10(\sqrt{3}-1) \approx 7{,}32051$.

3. Met $a = 12$, $b = 35$ en $c = 37$ levert de cosinusregel $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$:

$$
\begin{aligned}
& 12^2 = 35^2 + 37^2 - 2\cdot 35\cdot 37\cdot \cos\alpha \\
\Leftrightarrow\quad & 2\cdot 35\cdot 37\cdot \cos\alpha = 35^2 + 37^2 - 12^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 2590\cos\alpha = 2450 \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\alpha = \tfrac{245}{259} \\
\Leftrightarrow\quad & \alpha = \boxed{\cos^{-1}}\, \tfrac{245}{259} \approx 19^\circ
\end{aligned}
$$

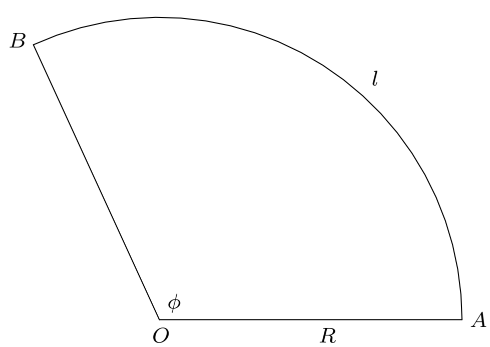
Net zo vind je met de cosinusregel $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$:

$$
\begin{aligned}
& 35^2 = 12^2 + 37^2 - 2\cdot 12\cdot 37\cdot \cos\beta \\
\Leftrightarrow\quad & 2\cdot 12\cdot 37\cdot \cos\beta = 12^2 + 37^2 - 35^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 888\cos\beta = 288 \\
\Leftrightarrow\quad & \cos\beta = \tfrac{288}{888} \\
\Leftrightarrow\quad & \beta = \boxed{\cos^{-1}}\, \tfrac{288}{888} \approx 71^\circ
\end{aligned}
$$

Dan geldt $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 90^\circ$.

Uit $12^2 + 35^2 = 144 + 1225 = 1369 = 37^2$ volgt $a^2 + b^2 = c^2$, dus het is een rechthoekige driehoek en γ is exact 90°.

4. Van de onderstaande cirkelsector is straal $R = 2$ en middelpuntshoek $\phi = 2$ (rad).



$\phi = 2 \text{ rad} = (\frac{180}{\pi}\cdot 2)^\circ = (\frac{360}{\pi})^\circ \approx 115^\circ$

$l = \phi\cdot R = 2\cdot 2 = 4$

De oppervlakte van de cirkelsector is $\frac{1}{2}\phi R^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2^2 = 4$.

5. Van een cirkelsector is de booglengte 10 en de oppervlakte 100. Gevraagd wordt de middelpuntshoek in graden.

   Noem de middelpuntshoek ϕ en de straal R, dan geldt:

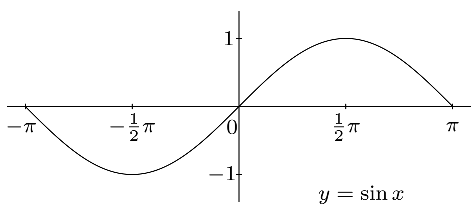
   De booglengte is $\phi \cdot R = 10$ en de oppervlakte is $\frac{1}{2}\phi R^2 = 100$, ofwel $\phi R^2 = 200$.

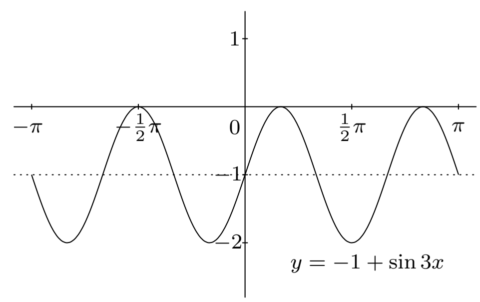
   Delen we deze uitdrukkingen op elkaar, dan komt er $\dfrac{\phi R^2}{\phi R} = 20$, dus $R = 20$.

   Dan is $\phi = \dfrac{10}{R} = \dfrac{10}{20} = 0{,}5\,\text{rad} = (\dfrac{90}{\pi})^\circ \approx 29^\circ$.

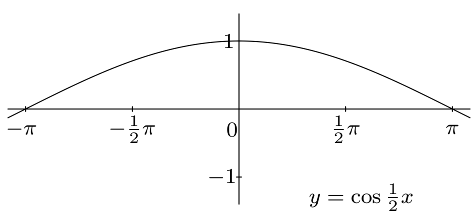
6. a. De grafiek van $y = \sin 3x$ ontstaat uit de grafiek van $y = \sin x$ door deze met een factor 3 ten opzichte van de y-as in te drukken.

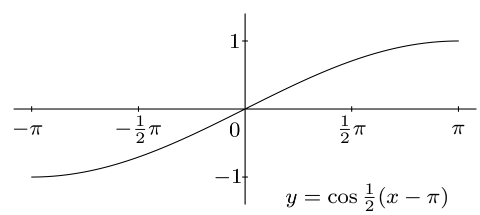
   De grafiek van $y = -1 + \sin 3x$ ontstaat uit die van $y = \sin 3x$ door deze over een afstand 1 naar beneden te schuiven:



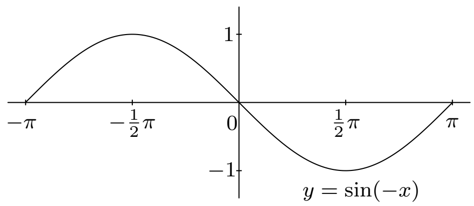


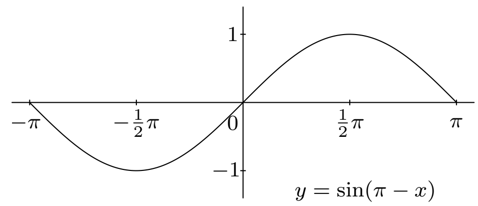
6. b. De grafiek van $y = \cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\pi) = \cos\frac{1}{2}(x - \pi)$ ontstaat uit de grafiek van $y = \cos x$ door deze met een factor 2 ten opzichte van de y-as uit te rekken (dat levert $y = \cos\frac{1}{2}x$) en het resultaat over π naar rechts te verschuiven:





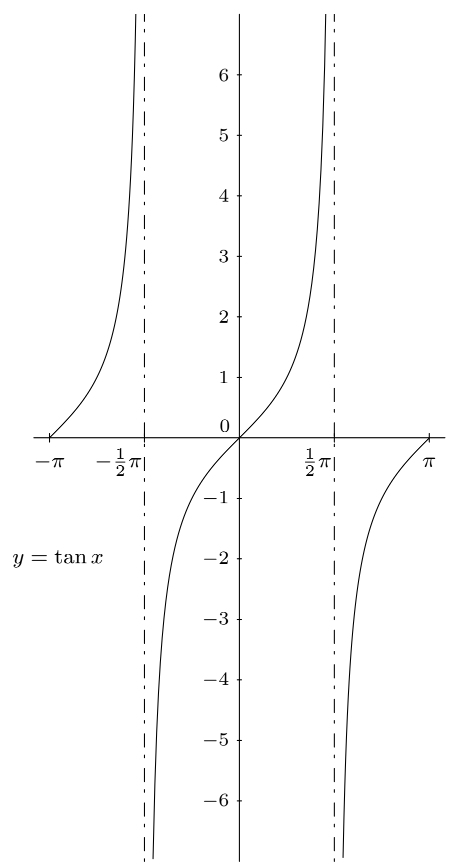
6. c. De grafiek van $y = \sin(\pi - x)$ ontstaat uit de grafiek van $y = \sin x$ door deze te spiegelen in de y-as (dat levert $y = \sin(-x)$) en het resultaat over π naar links te verschuiven:

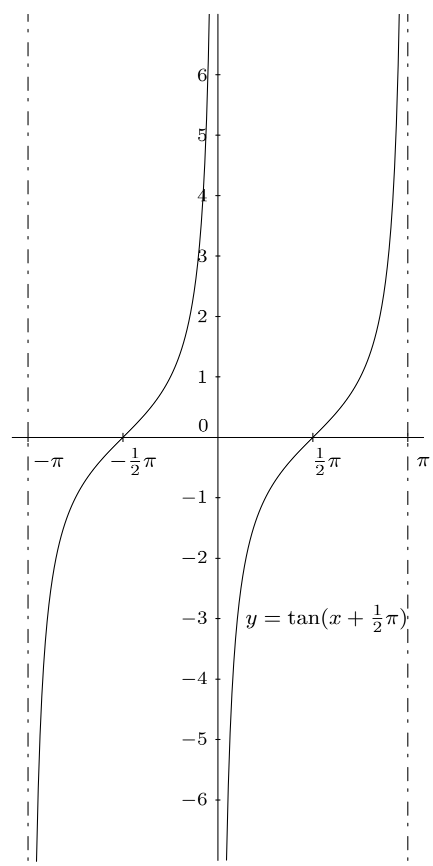




Het resultaat is weer de grafiek van de sinus en dat klopt, want $\sin(\pi - x) = \sin x$.

6. d. De grafiek van $y = \tan(x + \frac{1}{2}\pi)$ ontstaat uit de grafiek van $y = \tan x$ door deze over $\frac{1}{2}\pi$ naar links (of naar rechts, want $\tan(x + \frac{1}{2}\pi) = \tan(x - \frac{1}{2}\pi)$) te verschuiven:





7\. a.

$$\sin 3x = 1 \qquad \{\text{zie de grafiek van de sinus}\}$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x = \tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{2}{3}k\pi$$

b.

$$\cos(x - \tfrac{1}{4}\pi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \{\cos \tfrac{5}{6}\pi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\}$$
$$\Leftrightarrow \quad x - \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ x - \tfrac{1}{4}\pi = -\tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 1\tfrac{1}{12}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = -\tfrac{7}{12}\pi + 2k\pi$$

c.

$$\tan(1 - x) = -1 \qquad \{\tan \tfrac{3}{4}\pi = -1\}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 - x = \tfrac{3}{4}\pi + k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad x - 1 = -\tfrac{3}{4}\pi + k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 1 - \tfrac{3}{4}\pi + k\pi$$

d.

$$\cos(\pi \sin x) = 0 \qquad \{\text{grafiek cosinus}\}$$
$$\Leftrightarrow \quad \pi \sin x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \qquad \{\text{deel door } \pi\}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin x = \tfrac{1}{2} + k \qquad \{-1 \le \sin x \le 1, \text{ alleen } k = 0 \text{ en } k = -1 \text{ voldoen hieraan}\}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin x = \tfrac{1}{2} \ \vee \ \sin x = -\tfrac{1}{2} \qquad \{\sin \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2} \ \text{ en } \ \sin -\tfrac{1}{6}\pi = -\tfrac{1}{2}\}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = -\tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = -\tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{6}\pi + k\pi \ \vee \ x = \tfrac{5}{6}\pi + k\pi$$

8\. a. $\sin(x - \tfrac{1}{4}\pi) = \sin x \cos \tfrac{1}{4}\pi - \cos x \sin \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \sin x - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cos x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (\sin x - \cos x)$

b. $\cos(2x + \tfrac{1}{2}\pi) = \cos 2x \cos \tfrac{1}{2}\pi - \sin 2x \sin \tfrac{1}{2}\pi = -\sin 2x = -2 \sin x \cos x$